

1. Application du théorème spectral à la réduction des coniques

Méthodologie pour décrire et représenter une conique d'équation $ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1/ Rotation du repère pour éliminer le terme croisé de la partie quadratique $ax^2 + 2bxy + cy^2$:

On a : $ax^2 + 2bxy + cy^2 = X^T A X$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ est une matrice symétrique réelle.

On réduit la matrice symétrique réelle A dans une BOND ie on construit $P \in SO_2(\mathbb{R})$ telle que $P^T A P = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$

Les réels λ et μ sont les valeurs propres de A vérifiant : $\begin{cases} \lambda + \mu = \text{Tr}(A) \\ \lambda \mu = \det A \end{cases} \Leftrightarrow \lambda \text{ et } \mu \text{ racine de } \chi_A(x) = x^2 - \text{Tr}(A)x + \det(A)$

$P = \text{Mat}_{(\vec{i}, \vec{j})}(\vec{u}, \vec{v})$ où $\begin{cases} \vec{u} \text{ est un vecteur propre de A associé à } \lambda \\ \vec{v} \text{ est un vecteur propre associé à } \mu \end{cases}$ et $(\vec{u}, \vec{v})$ BON directe de $\mathbb{R}^2$.

Remarque : Si $\lambda \neq \mu$, $E_\lambda = \text{Ker}(A - \lambda I_2)$ et $E_\mu = \text{Ker}(A - \mu I_2)$ sont des sev de dimension 1 avec $E_\mu = E_\lambda^\perp$

Par changement de bases : $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P^T X \Leftrightarrow X = P X'$ et $P^T A P = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ alors : $X^T A X = X'^T D X' = \lambda(x')^2 + \mu(y')^2$

2/ Translation de l'origine pour éliminer la partie linéaire $dx + ey$:

Le changement de bases précédents modifie la partie linéaire avec la relation $X = P X'$: $dx + ey = \delta x' + \epsilon y'$

de sorte que la conique a pour équation dans $(O, \vec{u}, \vec{v})$: $\lambda(x')^2 + \mu(y')^2 + \delta x' + \epsilon y' + f = 0$

qu'on transforme en utilisant les identités remarquables pour retrouver une équation réduite de conique quitte à réaliser éventuellement un changement d'origine dans $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ avec Ω le centre ou le sommet de la conique.

Conséquence : Classification des coniques

— Si $\det A = \lambda \mu > 0$ alors λ et μ non nuls de même signe (celui de $\text{Tr}(A)$)

La réduction aboutit à une équation dans $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ de la forme : $\lambda X^2 + \mu Y^2 = k \Leftrightarrow |\lambda|X^2 + |\mu|Y^2 = \pm k$

C'est une conique du genre ellipse éventuellement dégénérée en $\emptyset$ ou $\{\Omega\}$

— Si $\det A = \lambda \mu < 0$ alors λ et μ non nuls de signes contraires

La réduction aboutit à une équation dans $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ de la forme : $\lambda X^2 + \mu Y^2 = k \Leftrightarrow |\lambda|X^2 - |\mu|Y^2 = \pm k$

C'est une conique du genre hyperbole éventuellement dégénérée en deux droites sécantes

— Si $\det A = \lambda \mu = 0$ alors λ ou μ est nulle

La réduction aboutit à une équation dans $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ de la forme : $X^2 = 2pY$ ou $Y^2 = 2pX$

C'est une conique du genre parabole éventuellement dégénérée en l'ensemble vide, une droite ou en une réunion de 2 droites parallèles

2. Extrema pour les fonctions de deux variables

- Formule de Taylor-Young pour une fonction de deux variables. Matrice Hessienne.

Si f est de classe C^2 sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^2$, la formule de Taylor-Young assure au point $(a, b) \in \mathcal{U}$ que :

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + h \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + k \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) + \underbrace{\frac{1}{2} \left(h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) \right)}_{=X^T H X} + \overbrace{(h^2 + k^2)\varepsilon(h, k)}^{=o(\|(h, k)\|^2)} \quad \text{où } \lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \varepsilon(h, k) = 0$$

où $X = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$ et $H = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$ est la matrice Hessienne de f en $(a, b) : r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)$, $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)$ et $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)$

- Condition nécessaire et condition suffisante pour la présence d'un extremum local

/ Condition nécessaire associée à la présence d'un extremum local :

un extremum local est atteint en un point critique de f i.e. $(a, b) \in \mathcal{U}$ avec $\overrightarrow{\text{grad}} f(a, b) = \vec{0} \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$

2/ Condition suffisante associée à la présence d'un extremum local par réduction de la matrice Hessienne :

La formule de Taylor-Young assure au point critique (a, b) que :

$$Q(h, k) = f(a+h, b+k) - f(a, b) = \underbrace{h \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + k \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)}_{=0 \text{ car } \overrightarrow{\text{grad}} f(a, b) = \vec{0}} + \frac{1}{2} X^T H X + o(\|(h, k)\|^2) \quad \text{a donc le signe de } X^T H X$$

où $X = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$ et $H = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$ est la matrice Hessienne de f en $(a, b) : r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)$, $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)$ et $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)$

Il y a un extremum (local) en (a, b) seulement si le signe de $Q(h, k) = f(a+h, b+k) - f(a, b)$ reste constant (localement).

Le théorème spectral assure que : $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \exists P \in O_2(\mathbb{R}), P^T H P = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ de sorte que $X^T H X = \lambda(h')^2 + \mu(k')^2$

où λ et μ sont les valeurs propres et $\begin{pmatrix} h' \\ k' \end{pmatrix}$ les coordonnées dans la base orthonormée formée par les vecteurs propres de H .

On peut conclure si on connaît le signe des valeurs propres ce qu'on peut obtenir à l'aide de $\det H$ et $\text{Tr}(H)$

Nature d'un point critique à l'aide de $\det H$ et $\text{Tr}(H)$

Si $\begin{cases} \lambda > 0 \\ \mu > 0 \end{cases}$, il y a un minimum local. Si $\begin{cases} \lambda < 0 \\ \mu < 0 \end{cases}$, il y a un maximum local. Si $\lambda \mu < 0$, $\begin{cases} \text{ni maximum} \\ \text{ni minimum} \end{cases}$ (point col)
(càd $\det H = \lambda \mu > 0$ et $\text{Tr}(H) = \lambda + \mu > 0$) (càd $\det H = \lambda \mu > 0$ et $\text{Tr}(H) = \lambda + \mu < 0$) (càd $\det H = \lambda \mu < 0$)

Remarque : Lorsque $\det H = 0$, on ne peut rien conclure, toutes les situations restent possibles

3/ Extremum local ou global Il s'agit d'étudier le signe de $Q(h, k) = f(a+h, b+k) - f(a, b)$

Pour nier la présence d'un extremum global, on montre que $Q(h, k)$ change de signe dans deux directions privilégiées (type $(h, 0)$, $(0, k)$, (h, h) , $(h, -h)$, etc) en utilisant un équivalent lorsque h (ou k) s'éloigne à l'infini

Pour prouver la présence d'un extremum global, on montre que $Q(h, k)$ garde un signe constant sur tout l'ouvert $\mathcal{U}$ ce qu'on obtient en faisant, par exemple, apparaître des carrés à l'aide d'identité remarquables.

4/ Présence d'un bord Lorsqu'on recherche les extrema sur un domaine qui n'est pas ouvert, ceux-ci ne sont pas forcément atteints en des points critiques. On possède un résultat assurant l'existence d'extrema :

« Si $[f : (x, y) \mapsto f(x, y)]$ est une fonction à valeurs réelles continue sur domaine D fermé et borné
alors f atteint un minimum et un maximum sur D »

On commence alors par rechercher les extrema sur l'ouvert défini par l'intérieur de D suivant la technique précédente et on compare ces valeurs avec celles des extrema sur les bords qu'on obtient en général en étudiant des fonction d'une seule variable (l'une des variables est fixé pour un bord parallèle à un axe par exemple).

3. Intégrales à paramètres

- Théorème de continuité d'une intégrale à paramètre.

Soit A et I des intervalles de $\mathbb{R}$ et $[f : A \times I \rightarrow \mathbb{K}]$ où $\mathbb{K}$ vaut $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$,

la fonction $\left[F : x \mapsto \int_I f(x, t) dt \right]$ est continue sur l'intervalle A lorsque

- pour tout $x \in A$, la fonction $[t \mapsto f(x, t)]$ est continue sur I
- pour tout $t \in I$, la fonction $[x \mapsto f(x, t)]$ est continue sur A
- il existe une fonction φ continue, positive et intégrable sur I telle que : $\forall (x, t) \in A \times I, |f(x, t)| \leq \varphi(t)$
(*hypothèse de domination*)

Idées à retenir :

- on peut obtenir, en général, les hypothèses i. et ii. en établissant la continuité de la fonction de deux variables f (qui entraîne celle des applications partielles).

- on peut utiliser une domination locale (guidée le plus souvent par le sujet) du type :

$[0, +\infty[= \bigcup_{A>0} [0, A]$ où l'expression de la dominante $\varphi(t)$ peut dépendre de A

$]0, +\infty[= \bigcup_{0<\varepsilon<A} [\varepsilon, A] = \bigcup_{A>0} [\varepsilon, +\infty[$ où l'expression de la dominante $\varphi(t)$ peut dépendre de ε et de A

- Théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre.

Soit A et I des intervalles de $\mathbb{R}$ et $[f : A \times I \rightarrow \mathbb{K}]$ où $\mathbb{K}$ vaut $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$,

la fonction $\left[F : x \mapsto \int_I f(x, t) dt \right]$ est de classe C^1 sur l'intervalle A avec $\forall x \in A, F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$ lorsque

- pour tout $x \in A$, la fonction $[t \mapsto f(x, t)]$ est intégrable sur I
- pour tout $t \in I$, la fonction $[x \mapsto f(x, t)]$ est de classe C^1 sur A
- pour tout $x \in A$, la fonction $\left[t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right]$ est continue sur I
- il existe une fonction φ continue, positive et intégrable sur I telle que : $\forall (x, t) \in A \times I, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t)$
(*hypothèse de domination*)

Idées à retenir :

- l'hypothèse i. s'obtient en général lorsqu'on étudie la définition de l'intégrale. Attention, on veut de l'intégrabilité et pas seulement la convergence de l'intégrale. Rappel : g est intégrable sur $I \Leftrightarrow g$ est continue sur J et $\int_J |g(t)| dt$ converge

- on peut obtenir, en général, les hypothèses ii. et iii. en établissant que la fonction de deux variables f est de classe C^1 ce qui entraîne que les applications partielles (d'une variable) sont aussi de classe C^1 (Attention au sens de C^1 qui n'est pas le même pour les fonctions de 2 variables ou d'une variables)

- on peut utiliser une domination locale (guidée le plus souvent par le sujet) du type :

$[0, +\infty[= \bigcup_{A>0} [0, A]$ où l'expression de la dominante $\varphi(t)$ peut dépendre de A

$]0, +\infty[= \bigcup_{0<\varepsilon<A} [\varepsilon, A] = \bigcup_{A>0} [\varepsilon, +\infty[$ où l'expression de la dominante $\varphi(t)$ peut dépendre de ε et de A

- Pour obtenir le caractère C^∞ , on utilise, en général, une démonstration par récurrence et on applique le théorème de dérivation pour prouver l'hérédité.