

Soit α un réel non nul. On pose, pour tout réel x de $[-1, 1]$: $g_\alpha(x) = \cos(\alpha \operatorname{Arcsin} x)$

1. Montrer que g_α est de classe C^2 sur $] -1, 1[$

On sait que la fonction Arcsin est C^∞ donc C^2 sur $] -1, 1[$ et que la fonction $\cos$ est C^∞ donc C^2 sur $\mathbb{R}$ aussi g_α est de classe C^2 sur $] -1, 1[$ par composition de fonctions de classe C^2 .

2. Donner, pour tout x de $] -1, 1[$, l'expression de $g'_\alpha(x)$ en fonction de x .

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad g'_\alpha(x) = \alpha \operatorname{Arcsin}'(x) \times \cos'(\alpha \operatorname{Arcsin} x) = \frac{\alpha}{\sqrt{1-x^2}} \times -\sin(\alpha \operatorname{Arcsin} x)$$

3. Donner, pour tout x de $] -1, 1[$, l'expression de $g''_\alpha(x)$ en fonction de x .

$$\begin{aligned} \forall x \in] -1, 1[, \quad g''_\alpha(x) &= \alpha \times \left((1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \right)' \times -\sin(\alpha \operatorname{Arcsin} x) + \frac{\alpha}{\sqrt{1-x^2}} \times -\alpha \operatorname{Arcsin}'(x) \times \sin'(\alpha \operatorname{Arcsin} x) \\ \text{soit : } g''_\alpha(x) &= \alpha \times -\frac{1}{2} \times -2x \times (1-x^2)^{-\frac{3}{2}} \times -\sin(\alpha \operatorname{Arcsin} x) + \frac{\alpha}{\sqrt{1-x^2}} \times \frac{-\alpha}{\sqrt{1-x^2}} \times \cos(\alpha \operatorname{Arcsin} x) \\ \text{ou : } g''_\alpha(x) &= -\frac{\alpha x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \times \sin(\alpha \operatorname{Arcsin} x) - \frac{\alpha^2}{1-x^2} \cos(\alpha \operatorname{Arcsin} x) \end{aligned}$$

4. Montrer que g_α est solution sur $] -1, 1[$ de l'équation différentielle $(1-x^2)y'' - xy' + \alpha^2 y = 0$ ($\mathcal{E}$)

Pour $x \in] -1, 1[$:

$$\begin{aligned} (1-x^2)g''_\alpha(x) - xg'_\alpha(x) + \alpha^2 g_\alpha(x) \\ = -\frac{\alpha x}{\sqrt{1-x^2}} \sin(\alpha \operatorname{Arcsin} x) - \alpha^2 \cos(\alpha \operatorname{Arcsin} x) + \frac{\alpha x}{\sqrt{1-x^2}} \sin(\alpha \operatorname{Arcsin} x) + \alpha^2 \cos(\alpha \operatorname{Arcsin} x) = 0 \end{aligned}$$

g_α est bien sur solution sur $] -1, 1[$ de l'équation différentielle $(1-x^2)y'' - xy' + \alpha^2 y = 0$ ($\mathcal{E}$)

5. On recherche une solution de ($\mathcal{E}$) développable sur $] -1, 1[$ en série entière sous la forme : $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

et telle que : $y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

- (a) Exprimer, pour tout entier naturel n , a_{n+2} en fonction de a_n

$$\begin{aligned} \text{Par dérivation terme à terme, on a, pour } x \in] -1, 1[: \quad y'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{et} \quad y''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \\ (1-x^2)y''(x) - xy'(x) + \alpha^2 y(x) = 0 \Leftrightarrow (1-x^2) \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + \alpha^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + \alpha^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0 \end{aligned}$$

On pose $k = n - 2$ dans la première somme (qui peut démarrer à $n = 2$) et $k = n$ dans les autres sommes.

$$(1-x^2)y''(x) - xy'(x) + \alpha^2 y(x) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} (k+2)(k+1) a_{k+2} x^k - \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1) a_k x^k - \sum_{k=0}^{+\infty} k a_k x^k + \alpha^2 \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k = 0$$

On peut regrouper toutes les sommes car elles sont toutes convergentes sur $] -1, 1[$:

$$(1-x^2)y''(x) - xy'(x) + \alpha^2 y(x) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} \left((k+2)(k+1) a_{k+2} - k(k-1) a_k - k a_k + \alpha^2 a_k \right) x^k = 0$$

Mais alors, par unicité du développement en série entière, on a :

$$\begin{aligned} (1-x^2)y''(x) - xy'(x) + \alpha^2 y(x) = 0 \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}, (k+1)(k+2) a_{k+2} - k(k-1) a_k - k a_k + \alpha^2 a_k = 0 \\ \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}, a_{k+2} = \frac{(k^2 - k + k - \alpha^2) a_k}{(k+1)(k+2)} = \frac{k^2 - \alpha^2}{(k+1)(k+2)} a_k \quad \text{car } (k+1)(k+2) \neq 0 \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi : } \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = \frac{n^2 - \alpha^2}{(n+2)(n+1)} a_n$$

- (b) Donner, pour tout entier naturel p , la valeur de a_{2p+1}

On sait que $a_0 = y(0) = 1$ et $a_1 = \frac{y'(0)}{1!} = 0$. Dès lors, par une récurrence immédiate avec l'hypothèse HR_p : « $a_{2p+1} = 0$ », on vérifie facilement que $\forall p \in \mathbb{N}, a_{2p+1} = 0$

Initialisation : HR_0 est vraie pour car $a_{2 \times 0 + 1} = a_1 = 0$

Hérédité : Prouvons $\text{HR}_p \Rightarrow \text{HR}_{p+1}$ autrement dit on suppose que $a_{2p+1} = 0$ et on vérifie que $a_{2(p+1)+1} = a_{2p+3} = 0$

Or, avec $n = 2p + 1$ dans la relation de 5.a, on a : $a_{2p+3} = \frac{(2p+1)^2 - \alpha^2}{(2p+3)(2p+2)} a_{2p+1} = 0$ si $a_{2p+1} = 0$

Conclusion : Par une récurrence simple sur p , on a donc justifié que $\forall p \in \mathbb{N}, a_{2p+1} = 0$

- (c) Exprimer, pour tout entier naturel p , a_{2p} en fonction de p (on ne cherchera pas à simplifier le numérateur de a_{2p})

En itérant la relation de 2.a, on a : $a_{2p} = \frac{(2p-2)^2 - \alpha^2}{(2p)(2p-1)} a_{2p-2} = \frac{((2p-2)^2 - \alpha^2)((2p-4)^2 - \alpha^2)}{(2p)(2p-1)(2p-2)(2p-3)} a_{2p-4}$

$$a_{2p} = \dots = \frac{((2p-2)^2 - \alpha^2)((2p-4)^2 - \alpha^2) \times \dots \times (2^2 - \alpha^2)(0^2 - \alpha^2)}{(2p)(2p-1)(2p-2)(2p-3) \times \dots \times 2 \times 1} a_0 \quad \text{Mais } a_0 = y(0) = 1 \text{ donc :}$$

$$a_{2p} = \frac{\prod_{k=0}^{p-1} ((2k)^2 - \alpha^2)}{(2p)!}$$

- (d) Que dire de la série entière lorsque α est un entier relatif pair? En déduire, dans ce cas, le rayon de convergence.

Si $\alpha = \pm 2n$ pour $n \in \mathbb{N}$ alors, par une récurrence initialisé à $p = n$, on a, pour tout $p \geq n$, $a_{2p} = 0$.

De ce fait, la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ est finalement un polynôme lorsque α est un entier relatif pair (il n'y a qu'un nombre fini de coefficients a_n non nul). La convergence de la série est alors réalisée pour tout x réel et donc

$$R = +\infty \quad \text{si } \alpha \text{ est un entier relatif pair}$$

- (e) Quel est le rayon de convergence de la série lorsque α n'est pas un entier relatif pair?

On suppose cette fois que $\forall n \in \mathbb{Z}, \alpha \neq \pm 2n \Rightarrow (2n)^2 - \alpha^2 \neq 0$ et a_{2p} ne sera jamais nul car il n'y aura pas de facteur nul dans le produit. La série est lacunaire $\sum_{n \geq 0} a_n x^n = \sum_{p \geq 0} a_{2p} x^{2p}$ et les coefficients a_{2p} ne s'annule plus donc on calcule le rayon de convergence R avec la règle de d'Alembert. Pour $x \neq 0$ en utilisant 2.a avec $n = 2p$:

$$\frac{|a_{2p+2} x^{2p+2}|}{|a_{2p} x^{2p}|} = \frac{|(2p)^2 - \alpha^2|}{(2p+2)(2p+1)} x^2 \sim_{p \rightarrow +\infty} \frac{4p^2}{4p^2} x^2 = x^2 \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} x^2$$

Si $x^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1$ alors la série converge absolument et donc $R \geq 1$. Si $x^2 > 1 \Leftrightarrow |x| > 1$ alors la série diverge grossièrement et donc $R \leq 1$. Finalement, on a

$$R = 1 \quad \text{si } \alpha \text{ n'est pas un entier relatif pair}$$

- (f) Justifier que g_α est bien développable en série entière et que le développement est donnée par la série $\sum a_n x^n$

Dans tous les cas (question (d) ou (e)), on a $R \geq 1$ donc on peut affirmer que le problème de Cauchy ($\mathcal{E}$) avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$ possède une solution développable en série entière.

Or, on sait déjà que g_α est solution de ($\mathcal{E}$) sur $] -1, 1[$ et que $g_\alpha(0) = \cos(\alpha \times 0) = 1$ et $g'_\alpha(0) = \frac{\alpha}{\sqrt{1-0^2}} \times -\sin(0) = 0$

Par unicité de la solution du problème de Cauchy, on peut affirmer que $g_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour $|x| < R$ où $R \geq 1 > 0$, on peut donc affirmer que

$$g_\alpha \text{ est développable en série entière et que le développement est donnée par la série } \sum a_n x^n$$

6. Dans cette question uniquement, on se place dans le cas où $\alpha = 1$.

- (a) Exprimer alors a_{2p} à l'aide de $(2p)!$ et de $p!$.

$$a_{2p} = \frac{\prod_{k=0}^{p-1} ((2k)^2 - 1^2)}{(2p)!} = \frac{\prod_{k=0}^{p-1} ((2k-1)(2k+1))}{(2p)!} = \frac{(-1) \times 1 \times 1 \times 3 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2p-5)(2p-3) \times (2p-3)(2p-1)}{(2p)!}$$

autrement dit : $a_{2p} = -\frac{1}{(2p)!} \frac{(1^2 \times 3^2 \times \dots \times (2p-1)^2)}{2p-1}$ car les termes au numérateur sont au carré sauf le premier et le dernier

On ajoute les carrés des termes pairs manquant au numérateur qu'on compense au dénominateur

$$a_{2p} = -\frac{1}{(2p)! \times (2p-1)} \frac{1^2 \times 2^2 \times 3^2 \times \dots \times (2p-1)^2 \times (2p)^p - 2}{2^2 \times 4^2 \times \dots \times (2p)^2} = -\frac{1}{(2p)! \times (2p-1)} \times \frac{(2p)!^2}{(2^p \times 1 \times 2 \times \dots \times p)^2} \Leftrightarrow a_{2p} = -\frac{(2p)!}{2^{2p} (p!)^2 (2p-1)}$$

- (b) Pour tout réel x de $[-1, 1]$, démontrer que $g_\alpha(x) = \sqrt{1-x^2}$

Pour $x \in [-1, 1]$:

$$g_1(x) = \cos(\text{Arcsin } x) = |\cos(\text{Arcsin } x)| = \sqrt{\cos^2(\text{Arcsin } x)} \quad \text{car } \text{Arcsin } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \cos(\text{Arcsin } x) \geq 0$$

$$\text{Aussi : } g_1(x) = \sqrt{1 - \sin^2(\text{Arcsin } x)} \Leftrightarrow g_1(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

- (c) En calculant directement le développement en série entière de $g_\alpha(x)$, retrouver l'expression de a_{2p}

On peut directement utiliser la formule du binôme généralisé : $g_1(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}} = (1+u)^{-\frac{1}{2}}$ avec $u = -x^2$. Pour $|u| < 1$:

$$(1+u)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\frac{1}{2} \times (\frac{1}{2}-1) \times (\frac{1}{2}-2) \times \dots \times (\frac{1}{2}-(n-1))}{n!} u^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \underbrace{(1 \times (-1) \times (-3) \times \dots \times (-(2n-3)))}_{=(-1)^{n-1} \times 1 \times 3 \times \dots \times (2n-3)} \frac{u^n}{n!}$$

$$\text{En ajoutant le facteur } (2n-1) \text{ manquant au numérateur et en compensant : } (1+u)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n} \times \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{2n-1} \frac{u^n}{n!}$$

En ajoutant au numérateur et au dénominateur le produits des termes pairs, on a :

$$(1+u)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \times \frac{1}{2n-1} \times \frac{(-1)^{n-1} (2n)!}{2 \times 4 \times \dots \times (2n)} \times \frac{u^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \times \frac{1}{2n-1} \times \frac{(-1)^{n-1} (2n)!}{2^n \times n!} \times \frac{u^n}{n!}$$

$$\text{Pour } |x^2| < 1 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1 : g_1(x) = \sqrt{1-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \times \frac{1}{2n-1} \times \frac{(-1)^{n-1} (2n)!}{2^n \times n!} \times \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-(2n)!}{(2^n)^2 (n!)^2 (2n-1)} x^{2n}$$

On retrouve bien l'expression a_{2n} de la question 6.a.

Dans un casino, il a deux machines à sous A et B qui sont réglées de la façon suivante :

- la probabilité de gagner sur la machine A est de $\frac{1}{5}$
- la probabilité de gagner sur la machine B est de $\frac{1}{10}$

Un joueur soupçonne les machines d'avoir des réglages différents mais il ne sait pas laquelle est la plus favorable. Il décide alors d'adopter la stratégie suivante :

- il commence par choisir une machine au hasard
- après chaque partie, il change de machine s'il vient de perdre et il rejoue sur la même machine s'il vient de gagner

On définit, pour $k \in \mathbb{N}^*$, les événements suivants :

- G_k « Le joueur gagne la k ième partie »
- A_k « La k ième partie se déroule sur la machine A »

1. Écrire une fonction Python `jouer` d'argument l'entier naturel non nul n et qui simule le déroulement de n parties retournant la proportion de parties gagnées parmi ces n parties.

Le programme doit :

- définir `jouer` d'argument n (donc je dois trouver « `def jouer(n) :` »)
- renvoyer la proportion de parties gagnées (on doit terminer par un « `return nbgagne/n` » et pas le nb de parties gagnées
- le choix équiprobable initial de la machine doit être pris en compte
- il s'agit de simuler n parties d'où la présence d'une boucle
- simuler correctement une partie sur chacune des machines avec les bonnes probabilités
- prévoir le changement de machine si la partie est perdue

Attention, les erreurs de syntaxe suivantes sont pénalisées :

- oubli indentation ou oubli de : après un `def`, un `if`, un `else`, un `for`, un `while`...
- erreur de symbole = au lieu de == pour un test ou = pour = dans une affectation
- erreur de manipulation de liste (un `L=append(...)` au lieu d'un `L.append(...)` par exemple)
- mauvais appel des fonctions `random`
- les erreurs conduisant à des erreurs à la réalisation du programme (par exemple : 0.2 et 0,2 n'ont pas le même sens en Python)

```

1  import random
2  def machine(b):
3      """ simule une partie avec la machine A si b=0 et B sinon
4          renvoie 1 pour une partie gagnée et 0 sinon """
5      p=random.random()
6      if b==0:
7          if p<0.2:
8              return 1
9          else:
10             return 0
11     else:
12         if p<0.1:
13             return 1
14         else:
15             return 0
16
17 def jouer(n):
18     L=[]
19     # choix initial de la machine: si x<0.5, machine A et machine B sinon
20     x=random.random()
21     if x<0.5:
22         b=0
23     else:
24         b=1
25     for i in range(n): # simulation des n parties dans la liste L
26         L.append(machine(b)) # L[i]=0 si la partie est perdue et 1 sinon
27         if L[i]==0: # il faut changer de machine
28             b=1-b # si b=1 alors b devient 0 et inversement
29     return sum(L)/n # sum(L)=nombre de 1 dans L=nombre de parties gagnées

```

OU AUTRE PROPOSITION :

```
1 import random
2
3 def jouer(n):
4     machine=0 # machine=0 si on joue avec la machine A et 1 sinon
5     total=0 # total est le nombre de partie gagnée
6     # choix de la machine initial aléatoire
7     if (random.random() > 0.5):
8         machine=1
9     for i in range(n): # simulation des n parties
10        if (machine==0):
11            if (random.random() < 0.2):
12                total+=1 # total n'augmente que si la partie est gagnée
13            else:
14                machine=1 # on change de machine si la partie est perdue
15        else:
16            if (random.random() < 0.1):
17                total+=1
18            else:
19                machine=0
20    return (total/n)
```

OU AUTRE PROPOSITION :

```
1 import random as rd
2 def jouer(n):
3     nbgagne=0 #nombre de parties gagnées
4     machineA=rd.choice([True, False]) #choix initial equiprobable
5     for i in range(n):
6         if machineA==True:
7             probavictoire=0.2
8         else:
9             probavictoire=0.1
10        if rd.random() < probavictoire: #realisation de la partie
11            nbgagne+=1 #ajout d'une partie gagnée
12        else:
13            machineA=not machine A #changement de machine car partie perdue
14    return nbgagne/n
```

2. Déterminer la probabilité de gagner la première partie

Il s'agit de calculer $P(G_1)$. On utilise pour cela le système complet d'événement $\{A_1, \overline{A_1}\}$ sachant que, vu que le choix initial de la machine est aléatoire, $P(A_1) = P(\overline{A_1}) = \frac{1}{2}$. En outre, on connaît aussi les probabilité conditionnelle :

- si A_1 est réalisé, le joueur joue sur la machine A et donc il gagne avec une probabilité de $\frac{1}{5}$ soit $P(G_1|A_1) = \frac{1}{5}$
- si $\overline{A_1}$ est réalisé, le joueur joue sur la machine B et donc il gagne avec une probabilité de $\frac{1}{10}$ soit $P(G_1|\overline{A_1}) = \frac{1}{10}$

D'après la formule des probabilités totales :

$$P(G_1) = P(A_1) \times P(G_1|A_1) + P(\overline{A_1}) \times P(G_1|\overline{A_1}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{10} = \frac{2+1}{2 \times 10} = \frac{3}{20}$$

3. Que dire de la famille d'événements $\{A_1 \cap A_2, A_1 \cap \overline{A_2}, \overline{A_1} \cap A_2, \overline{A_1} \cap \overline{A_2}\}$? En déduire $P(G_2)$.

- Justifions que cette famille est un système complet d'événements :

Méthode n° 1 : Les événements de cette famille sont deux à deux incompatibles (car l'intersection de 2 événements comporte toujours soit $A_1 \cap \overline{A_1}$ soit $A_2 \cap \overline{A_2}$ qui est vide) et la réunion de ces événements donne l'univers en entier car :

$$(A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap \overline{A_2}) \cup (\overline{A_1} \cap A_2) \cup (\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) = (A_1 \cap (A_2 \cup \overline{A_2})) \cup (\overline{A_1} \cap (A_2 \cup \overline{A_2})) = (A_1 \cap \Omega) \cup (\overline{A_1} \cap \Omega) = A_1 \cup \overline{A_1} = \Omega$$

Méthode n° 2 : Les 4 événements donnent les 4 alternatives possibles à l'issue de la première partie :

$A_1 \cap A_2$ est l'événement « la partie n°1 jouée sur la machine A est gagnante »

$A_1 \cap \overline{A_2}$ est l'événement « la partie n°1 jouée sur la machine A est perdante »

$\overline{A_1} \cap A_2$ est l'événement « la partie n°1 jouée sur la machine B est gagnante »

$\overline{A_1} \cap \overline{A_2}$ est l'événement « la partie n°1 jouée sur la machine B est perdante »

L'un et un seul de ces événements sera réalisé à l'issue de la première partie aussi cette famille est un système complet d'événements.

• On peut utiliser la formule des probabilités totales sur ce système complet d'événements :

$$\text{Méthode n° 1 : } P(G_2) = P(A_1 \cap A_2) \times P(G_2|A_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap \bar{A}_2) \times P(G_2|A_1 \cap \bar{A}_2) + P(\bar{A}_1 \cap A_2) \times P(G_2|\bar{A}_1 \cap A_2) + P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2) \times P(G_2|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2)$$

On connaît les probabilités conditionnelles de cette formule :

- elles valent $\frac{1}{5}$ si on conditionne par $A_1 \cap A_2$ ou $\bar{A}_1 \cap A_2$ puisque A_2 étant réalisé, on joue sur la machine A

- elles valent $\frac{1}{10}$ pour les deux autres conditionnements où $\bar{A}_2$ est réalisé donc le jeu est sur la machine B

On calcule les autres probabilités par la formule des probabilités composées :

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \times P(A_2|A_1) \text{ or } P(A_2|A_1) = P(G_1|A_1) = \frac{1}{5} \text{ (sachant } A_1, \text{ on réalise } A_2 \text{ lorsqu'on réalise } G_1) \text{ soit } P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$$

$$\text{Et, de même : } P(A_1 \cap \bar{A}_2) = P(A_1) \times P(\bar{A}_2|A_1) = P(A_1) \times P(\bar{G}_1|A_1) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} = \frac{4}{10} \text{ et aussi, de manière analogue et en se limitant aux}$$

$$\text{applications numériques : } P(\bar{A}_1 \cap A_2) = \frac{1}{2} \times \frac{9}{10} = \frac{9}{20} \text{ et } P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{20}$$

$$\text{Finalement : } P(G_2) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{5} + \frac{4}{10} \times \frac{1}{10} + \frac{9}{20} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{20} \times \frac{1}{10} = \frac{4+8+18+1}{200} = \frac{31}{200}$$

$$\text{Méthode n° 2 : } P(G_2) = P(A_1 \cap A_2 \cap G_2) + P(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap G_2) + P(\bar{A}_1 \cap A_2 \cap G_2) + P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap G_2)P$$

$$\text{On calcule les probabilités par la formule des probabilités composées : } P(A_1 \cap A_2 \cap G_2) = P(A_1) \times P(A_2|A_1) \times P(G_2|A_1 \cap A_2)$$

$P(A_2|A_1)$ est la probabilité de jouer sur la machine A au 2ème jeu alors qu'on jouait sur la machine A au premier jeu : c'est donc la probabilité de gagner sur la machine A lors du premier jeu pour rester sur cette machine A soit $P(A_2|A_1) = \frac{1}{5}$

$$P(G_2|A_1 \cap A_2) = \frac{1}{5}, \text{ probabilité de gagner sachant qu'on joue sur la machine A. Ainsi : } P(A_1 \cap A_2 \cap G_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5}$$

De manière analogue :

$$P(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap G_2) = P(A_1) \times P(\bar{A}_2|A_1) \times P(G_2|A_1 \cap \bar{A}_2) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{10}$$

$$P(\bar{A}_1 \cap A_2 \cap G_2) = P(\bar{A}_1) \times P(A_2|\bar{A}_1) \times P(G_2|\bar{A}_1 \cap A_2) = \frac{1}{2} \times \frac{9}{10} \times \frac{1}{5}$$

$$P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap G_2) = P(\bar{A}_1) \times P(\bar{A}_2|\bar{A}_1) \times P(G_2|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10}$$

$$\text{Finalement : } P(G_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{10} + \frac{1}{2} \times \frac{9}{10} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{4+2 \times 4+2 \times 9+1}{200} = \frac{31}{200}$$

4. Sachant que la deuxième partie a été gagnée, quelle est la probabilité que cette partie l'ait été sur la machine A?

$$\text{On cherche désormais } P(A_2|G_2) \text{ soit : } P(A_2|G_2) = \frac{P(A_2 \cap G_2)}{P(G_2)} = \frac{P(A_2) \times P(G_2|A_2)}{P(G_2)}$$

Méthode n° 1 : on calcule $P(A_2)$ avec le système complet $\{A_1, \bar{A}_1\}$:

$$P(A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1) + P(\bar{A}_1)P(A_2|\bar{A}_1) = \frac{1}{2} \times P(G_1|A_1) + \frac{1}{2}P(\bar{G}_1|\bar{A}_1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{9}{10} = \frac{2+9}{20} = \frac{11}{20}$$

puisque en effet : $P(A_2|A_1)$ est la probabilité de gagner sachant qu'on joue sur la machine A soit $P(A_2|A_1) = P(G_1|A_1) = \frac{1}{5}$

et $P(A_2|\bar{A}_1)$ est la probabilité de perdre sachant qu'on joue sur la machine B soit $\frac{9}{10}$

Méthode n° 2 : on remarque que : $A_2 = (A_1 \cap G_1) \cup (\bar{A}_1 \cap \bar{G}_1)$ car, pour jouer la deuxième partie sur la machine A, soit on a gagné la première sur la machine A, soit on a perdu la première sur la machine B

Les événements $A_1 \cap G_1$ et $\bar{A}_1 \cap \bar{G}_1$ sont incompatibles aussi, avec la formule des probabilités composées :

$$P(A_2) = P(A_1 \cap G_1) + P(\bar{A}_1 \cap \bar{G}_1) = P(A_1) \times P(G_1|A_1) + P(\bar{A}_1) \times P(\bar{G}_1|\bar{A}_1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{9}{10} = \frac{11}{20}$$

En effet, $P(\bar{G}_1|\bar{A}_1)$ est la probabilité de perdre sachant qu'on joue sur la machine B soit $1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$

$$\text{Finalement : } P(A_2|G_2) = \frac{\frac{11}{20} \times \frac{1}{5}}{\frac{31}{200}} = \frac{11}{100} \times \frac{200}{31} \Leftrightarrow \boxed{P(A_2|G_2) = \frac{22}{31}}$$

5. On fixe $k \in \mathbb{N}^*$

(a) Exprimer $P(G_k)$ à l'aide de $P(A_k)$.

On utilise cette fois le système complet $\{A_k, \overline{A_k}\}$ et la formule des probabilités totales :

$$P(G_k) = P(A_k) \times P(G_k|A_k) + P(\overline{A_k}) \times P(G_k|\overline{A_k}) = P(A_k) \times \frac{1}{5} + (1 - P(A_k)) \times \frac{1}{10} \quad \text{soit} \quad \boxed{P(G_k) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10}P(A_k)}$$

où $P(G_k|A_k)$ (resp $P(G_k|\overline{A_k})$) est la probabilité de gagner sur la machine A (resp B) soit $P(G_k|A_k) = \frac{1}{5}$ (resp $P(G_k|\overline{A_k}) = \frac{1}{10}$)

Remarque : Écrire $G_k = (A_k \cap G_k) \cup (\overline{A_k} \cap G_k)$ où les deux événements sont incompatibles, c'est (re)découvrir les probabilités totales...

(b) Montrer que $P(A_{k+1}) = -\frac{7}{10}P(A_k) + \frac{9}{10}$

Méthode n° 1 : On utilise le système complet $\{A_k, \overline{A_k}\}$ et la formule des probabilités totales :

$$P(A_{k+1}) = P(A_k) \times P(A_{k+1}|A_k) + P(\overline{A_k}) \times P(A_{k+1}|\overline{A_k}) \quad \text{avec} \quad P(\overline{A_k}) = 1 - P(A_k)$$

Mais : $P(A_{k+1}|A_k) = P(G_k|A_k) = \frac{1}{5}$ (pour jouer sur la machine A la partie $k+1$, il faut gagner la partie k jouer sur la machine A)

et : $P(A_{k+1}|\overline{A_k}) = P(\overline{G_k}|\overline{A_k}) = \frac{9}{10}$ (pour jouer sur la machine A la partie $k+1$, il faut perdre la partie k jouer sur la machine B)

$$\text{Ainsi : } P(A_{k+1}) = P(A_k) \times \frac{1}{5} + (1 - P(A_k)) \times \frac{9}{10} \Leftrightarrow \boxed{P(A_{k+1}) = -\frac{7}{10}P(A_k) + \frac{9}{10}}$$

Méthode n° 2 : On remarque $A_{k+1} = (A_k \cap G_k) \cup (\overline{A_k} \cap \overline{G_k})$ car, pour jouer la partie $k+1$ sur la machine A, soit on a gagné la partie k sur la machine A, soit on l'a perdue sur la machine B et les deux événements sont incompatibles :

$$P(A_{k+1}) = P(A_k \cap G_k) + P(\overline{A_k} \cap \overline{G_k}) = P(A_k) \times P(G_k|A_k) + P(\overline{A_k}) \times P(\overline{G_k}|\overline{A_k}) = P(A_k) \times P(G_k|A_k) + P(\overline{A_k}) \times (1 - P(G_k|\overline{A_k}))$$

et voir 5a pour la justification des probabilités conditionnelles

(c) En déduire $P(A_k)$ puis $P(G_k)$ en fonction de k

On reconnaît pour $(P(A_k))_{k \geq 1}$ une suite arithmético-géométrique :

$$\text{- l'équation aux limites est : } \ell = -\frac{7}{10}\ell + \frac{9}{10} \Leftrightarrow \frac{17}{10}\ell = \frac{9}{10} \Leftrightarrow \ell = \frac{9}{17}$$

- la suite (v_k) où $v_k = P(A_k) - \ell$ est géométrique :

$$v_{k+1} = P(A_{k+1}) - \ell = \left(-\frac{7}{10}P(A_k) + \frac{9}{10}\right) - \left(-\frac{7}{10}\ell + \frac{9}{10}\right) = -\frac{7}{10}(P(A_k) - \ell) = -\frac{7}{10}v_k \quad \text{soit} \quad v_k = \left(-\frac{7}{10}\right)^{k-1} \times v_1$$

$$\text{Ainsi : } P(A_k) = v_k + \ell = \left(-\frac{7}{10}\right)^{k-1} \times (P(A_1) - \ell) + \ell = \left(-\frac{7}{10}\right)^{k-1} \left(\frac{1}{2} - \frac{9}{17}\right) + \frac{9}{17} \quad \text{soit} \quad \boxed{P(A_k) = \left(-\frac{7}{10}\right)^{k-1} \left(-\frac{1}{34}\right) + \frac{9}{17}}$$

$$\text{puis : } P(G_k) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} \left(\left(-\frac{7}{10}\right)^{k-1} \left(-\frac{1}{34}\right) + \frac{9}{17}\right) \quad \text{soit} \quad \boxed{P(G_k) = \frac{13}{85} - \left(-\frac{7}{10}\right)^{k-1} \times \frac{1}{340}}$$

(d) Pour $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n P(G_k)$. Calculer S_n puis la limite de $\frac{S_n}{n}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$

Comparer votre résultat à des simulations numériques obtenues à l'aide de la question 1.

On a :

$$\sum_{k=1}^n P(G_k) = \sum_{k=1}^n \frac{13}{85} - \frac{1}{340} \sum_{k=1}^n \left(-\frac{7}{10}\right)^{k-1} = \frac{13}{85}n - \frac{1}{340} \times \sum_{l=0}^{n-1} \left(-\frac{7}{10}\right)^l = \frac{13}{85}n - \frac{1}{340} \times \frac{1 - \left(-\frac{7}{10}\right)^n}{1 + \frac{7}{10}} = \frac{13}{85}n - \frac{1}{34 \times 17} \left(1 - \left(-\frac{7}{10}\right)^n\right)$$

$$\text{Aussi : } \frac{S_n}{n} = \frac{13}{85} - \underbrace{\frac{1}{34 \times 17n}}_{\rightarrow 0} \underbrace{\left(1 - \left(-\frac{7}{10}\right)^n\right)}_{\rightarrow 1-0} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{13}{85} - 0 \times 1 = \frac{13}{85} \quad \text{soit} \quad \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n} = \frac{13}{85}}$$

En faisant tourner l'algorithme, on trouve, pour n grand, une valeur empirique proche de cette valeur théorique

Ce problème est un extrait d'un sujet Banque PT de 2010 : la technicité calculatoire attendue était, sans conteste, nettement supérieure aux attendus actuels mais c'était une autre époque...

1. Il s'agissait d'utiliser le théorème de composition. Attention, dire Arcsin et cos sont C^2 sur $] -1, 1[$ ne sera pas suffisant : on utilise bien le caractère C^2 de Arcsin sur $] -1, 1[$ mais on applique le cosinus aux valeurs prises par $\alpha \text{Arcsin } x$ donc sur $] -|\alpha|\frac{\pi}{2}, |\alpha|\frac{\pi}{2}[$ et comme $\alpha \in \mathbb{R}^*$, il faut donc le caractère C^2 du cosinus sur $\mathbb{R}$.

2.,3.,4. Juste des questions de calculs...Il suffit d'être rigoureux. **Attention!** Il y a encore beaucoup de confusion entre $=$ et $\Leftrightarrow$!

5(a) Le grand classique : là encore, il faut être rigoureux et précis. Ici, pour que y soit solution sur $] -1, 1[$, il faudra vérifier $R \geq 1$ (et pas seulement $R > 0$...)

5(b) Le résultat de cours « Si y est DSE alors le coefficient a_n de son développement vaut $a_n = \frac{y^{(n)}(0)}{n!}$ » semble mal connu...

Il n'est pas nécessaire de redémontrer que $y'(0) = a_1$, c'est directement du cours comme $a_0 = y(0)$ ou $a_2 = \frac{y''(0)}{2}$...

5(c) Une itération à mener, c'est toujours un peu technique : il faut prendre son temps et bien veiller à simplifier.

Ici, il était important de simplifier : $a_{k+2} = \frac{(k(k-1) + k - \alpha^2)}{(k+2)(k+1)} a_k$ en $a_{k+2} = \frac{k^2 - \alpha^2}{(k+2)(k+1)} a_k$

Vous repérez généralement la présence de $(2p)!$ dans le a_{2p} mais, attention à bien l'écrire : $(2p)! \neq 2p!$!

Le produit du numérateur n'est pas toujours bien indicé : $a_{2p} = \frac{\prod_{k=0}^{p-1} ((2k)^2 - \alpha^2)}{(2p)!}$ et pas $\prod_{k=0}^p ((2k)^2 - \alpha^2)$ ou $\prod_{k=1}^{p-1} ((2k)^2 - \alpha^2)$

5(d) Les justifications sont souvent brouillonnettes : je vous renvoie vers le corrigé

5(e) **Attention!** Dire que α n'est pas un entier naturel pair ne signifie pas que α est un entier naturel impair! Dans cette question, on traite les cas de $\alpha \in \mathbb{R}^*$ qui ne sont pas traités dans (d)...L'idée est de repérer qu'alors les coefficients a_{2p} ne s'annulent jamais et on

peut donc utiliser la règle de d'Alembert sur la série lacunaire $y(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p} x^{2p}$

Attention à l'application de la règle de d'Alembert : on calcule la limite du quotient de deux termes consécutifs (pas 2 coefficients!)

Autrement dit on doit simplifier : $\frac{|a_{2p+2} x^{2p+2}|}{|a_{2p} x^{2p}|}$ et pas simplement $\frac{|a_{2p+2}|}{|a_{2p}|}$

Méfiez vous des corrigés qui utilisent des règles obsolètes qui ne s'appliquent pas dans tous les cas...

Par exemple : pour la série $\sum_{n \geq 0} 2^n x^{2n}$, le calcul $\frac{|a_{2n+2}|}{|a_{2n}|} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2$ et votre « règle obsolète » conclurait $R = \frac{1}{2}$ alors que le quotient à

calculer est $\frac{|a_{2n+2} x^{2n+2}|}{|a_{2n} x^{2n}|} = \frac{2^{n+1}}{2^n} x^2 = 2x^2$ conduit à $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$ par la discussion :

il y a CVA si $2x^2 < 1 \Leftrightarrow x^2 < \frac{1}{2} \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$ donc $R \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$, il y a DVG si $2x^2 > 1 \Leftrightarrow |x| > \frac{1}{\sqrt{2}}$ d'où $R \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$

5(f) Dans cette question, il s'agit de signaler que $R \geq 1$ dans tous les cas (bilan de (d) et (e)) et donc que le problème de Cauchy possède bien une solution DSE sur $] -1, 1[$. Or, puisqu'on sait que g_α est solution de ce problème et que la solution d'un problème de Cauchy est unique, on peut identifier $g_\alpha(x)$ et $y(x)$ sur $] -1, 1[$ ce qui assure le résultat.

6(a) Une question de technicité calculatoire où il s'agit d'être rigoureux dans les étapes (voir corrigé)

6(b) L'argument $\cos(\text{Arcsin } x) \geq 0$ car $\text{Arcsin } x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ est en général manquant or $\sqrt{a^2} = |a|$ donc écrire $\cos(\text{Arcsin } x) = \sqrt{\cos^2(\text{Arcsin } x)}$ nécessite bien cet argument...

6(c) Une autre question de technicité en partant de la formule du binôme cette fois (voir corrigé)

1. Cette question a été, en général, bien réussie. Attention toutefois à faciliter la compréhension de vos programmes. Les rapports de jury soulignent que le correcteur limite sa compréhension d'un programme à deux lectures maximum : vous devez donc faire un effort de clarté, n'hésitant pas à mettre des commentaires pour aider à la compréhension de vos programmes (surtout quand ils sont subtiles)

Pour l'évaluation, la présence des éléments suivants permet de récupérer des points :

- on demande une fonction qui s'appelle jouer de paramètre n d'où présence de : `def jouer(n) :`
- elle renvoie la proportion de partie gagnée d'où une fin en : `return k/n` où k est le nombre de parties gagnées
- respect des indentations
- présence initiale de `import random` puisqu'il s'agit de faire des tirages aléatoire
- code pour simuler le choix aléatoire de la machine initiale
- présence d'une boucle pour simuler les n parties à jouer
- code pour simuler le jeu sur une machine fixée (tirage aléatoire et test)
- test pour savoir si la partie est gagnée avec :
 - incrémentation du nombre de parties gagnées lorsque la partie est gagnée
 - basculement sur l'autre machine lorsque la partie est perdue

Ensuite, j'ai retiré des points en cas de faute grave dans l'algorithme ou la syntaxe du programme. J'ai signalé sur vos copies les lignes inutiles (souvent des affectations qui ne changent rien ou l'introduction de variables qui ne servent à rien) mais, étant sans conséquence sur la réalisation programme, je ne l'ai pas sanctionnée.

2. **A l'écrit (et même à l'oral), il n'y a pas à introduire de nouveaux événements si le sujet a déjà introduit les événements**

Certains ont introduit les événements G_A (resp G_B) « la première partie est gagnée sur la machine A (resp B) »

Autrement dit G_A est l'événement :

« la première partie est jouée sur la machine A » et « la première partie est gagnée » soit $G_A = A_1 \cap G_1$

Bien souvent, ces étudiants écrivent $P(G_A) = \frac{1}{5}$ ce qui est faux ! C'est la probabilité conditionnelle $P(G_1|A_1) = \frac{1}{5}$

Par contre : $P(G_A) = P(A_1 \cap G_1) = P(A_1) \times P_{A_1}(G_1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{5}$ s'obtient par la formule des probabilités composées.

De même : $G_B = G_1 \cap \overline{A_1}$ et l'affirmation souvent écrite (rarement justifiée) que $G_1 = G_A \cup G_B$ est liée au fait que $\{A_1, \overline{A_1}\}$ est un système complet d'événement aussi : $G_1 = G_1 \cap \Omega = G_1 \cap (A_1 \cup \overline{A_1}) = (G_1 \cap A_1) \cup (G_1 \cap \overline{A_1})$

Enfin, vous devez justifier les probabilités utilisées à l'aide du texte :

$P(A_1) = P(\overline{A_1}) = \frac{1}{2}$ car le choix initial de la machine est à équiprobabilité sur les deux machines

$P(G_1|A_1) = \frac{1}{5}$ car, si on joue sur la machine A, la probabilité de gagner est de $\frac{1}{5}$, etc...

3. Deux approches possibles (détaillées dans la correction) pour obtenir que la famille indiquée est un système complet d'événement...Le sujet vous oriente donc vers une formule des probabilités totales avec ce système complet. Vous devez soigneusement expliquer (au moins pour l'une d'entre elle) comment vous obtenez les probabilités conditionnelles. Au niveau des applications numériques, je rappelle que vous n'aurez pas de calculatrice aussi laissez vos résultats sous forme fractionnaire (réduite toutefois!)
4. Là encore, deux raisonnements possibles détaillés dans la corrections et, là encore, vous devez expliquer vos probabilités conditionnelles...
5. (a) Encore une formule de probabilité totale mais cette fois avec le système complet $\{A_k, \overline{A_k}\}$
- (b) Deux approches possibles détaillées dans la correction.
- (c) Vous avez, en général, repéré la suite arithmético-géométrique et appliqué la méthodologie.
Attention à l'indice de démarrage lorsque vous exprimez une suite géométrique :
si (u_n) est géométrique de raison q et de premier terme u_{n_0} alors $u_n = u_{n_0} \times q^{n-n_0}$ (l'indice de départ $n_0 + 1$ l'exposant d'itération $n - n_0$ vaut l'indice final n)
- (d) Il s'agissait de manipuler des sommes finies et d'identifier une somme géométrique. Le décalage d'indice pouvant se gérer soit par un changement d'indice (voir corrigé) soit par :

$$\sum_{k=1}^n \left(-\frac{7}{10}\right)^{k-1} = -\frac{10}{7} \sum_{k=1}^n \left(-\frac{7}{10}\right)^k = -\frac{10}{7} \times \underbrace{-\frac{7}{10}}_{\text{premier terme}} \times \frac{1 - \left(-\frac{7}{10}\right)^n}{1 - \left(-\frac{7}{10}\right)}$$

Pour le passage à la limite, on utilise, bien sûr, la limite d'une suite géométrique qui tend vers 0 puisque $\left|-\frac{7}{10}\right| < 1$